

Mathématiques dans la perception visuelle des contours

M. Virginia Bolelli

CentraleSupélec, L2S – Paris-Saclay

March 14th, 2024

1 Phénomènes perceptuels

- Les lois de la Gestalt

2 Le cortex cérébral et les voies visuelle primaires

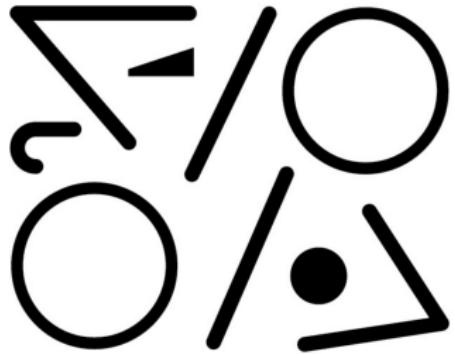
- Cortex visuel primaire

3 Modèles neurogéométriques de la perception visuelle des contours

- Le modèle Citti-Sarti

Une image est composée d'un ensemble de points et constitue une donnée non structurée.

Comment percevons-nous les objets et les figures?



Une image est composée d'un ensemble de points et constitue une donnée non structurée.

Comment percevons-nous les objets et les figures?

Quelques remarques:

- La perception est une tâche globale : l'ensemble est différent de la somme des parties individuelles.

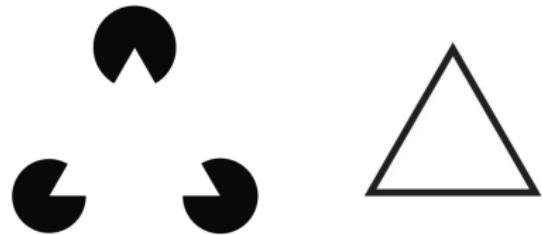


Une image est composée d'un ensemble de points et constitue une donnée non structurée.

Comment percevons-nous les objets et les figures?

Quelques remarques:

- La perception est une tâche globale : l'ensemble est différent de la somme des parties individuelles.
- L'image perçue n'est pas la vraie.

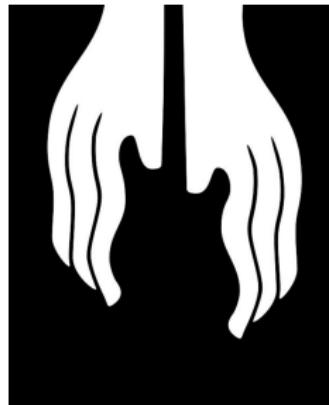


Une image est composée d'un ensemble de points et constitue une donnée non structurée.

Comment percevons-nous les objets et les figures?

Quelques remarques :

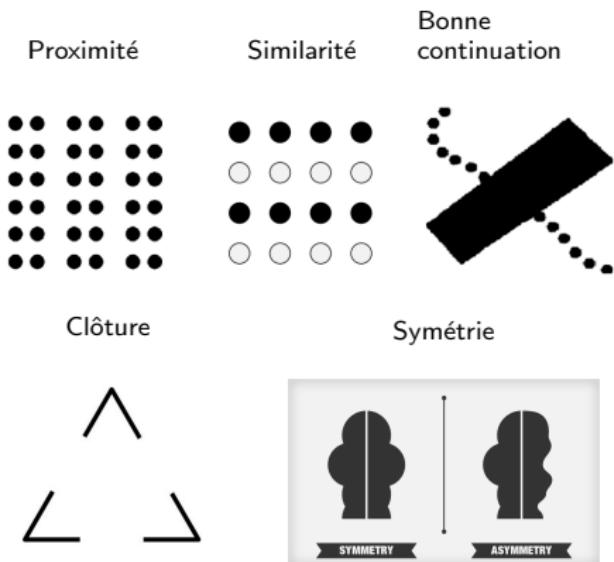
- La perception est une tâche globale : l'ensemble est différent de la somme des parties individuelles.
- L'image perçue n'est pas la vraie.
- L'image perçue n'est pas unique.



Les lois de la Gestalt sur l'organisation de la perception

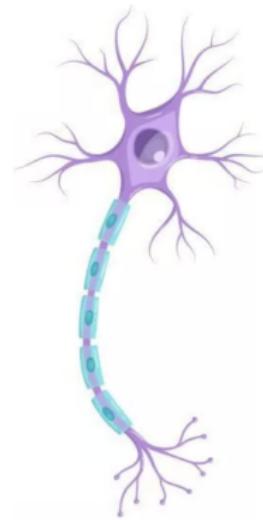
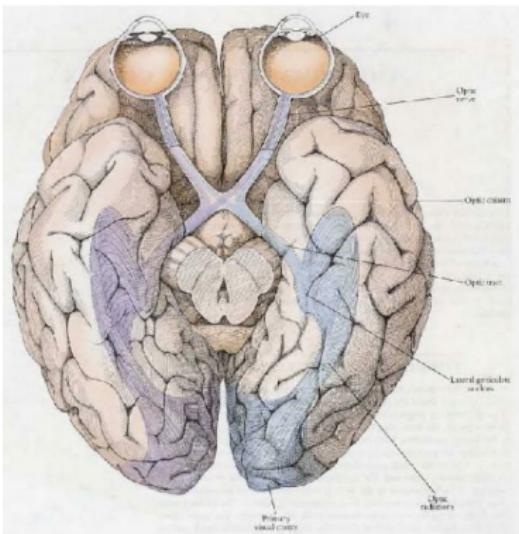
Théorie de la Gestalt ("forme" en allemand): le stimulus perçu est quelque chose de plus que la simple somme de toutes ses parties [Kof35, Koh29, Wer23].

Quelques lois qui guident notre perception visuelle:



Système visuel

Le système visuel est à la base de la perception et implique plusieurs organes dans le traitement du signal visuel.



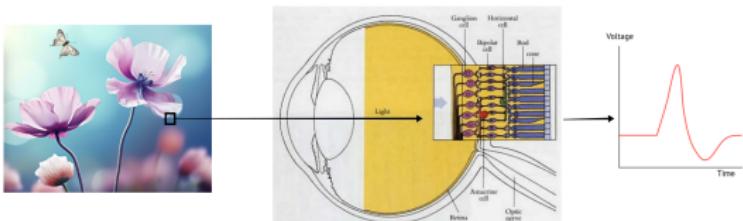
La voie visuelle décrit les aires corticales impliquées, qui comprennent un vaste réseau de neurones interconnectés, travaillant ensemble pour traiter l'information reçue.

De la rétine au V1

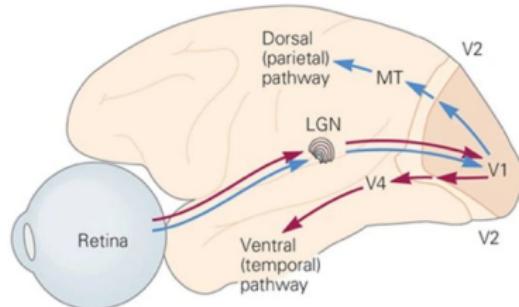
Les mécanismes neuronaux impliqués dans le système visuel prennent naissance dans la rétine et se propagent. Nous nous concentrerons sur le cortex visuelle primaire.

Rétine

- Transduction: l'image se transforme en signal électrique.
- Transmission du signal.



LGN
(Lateral Geniculate Nucleus)



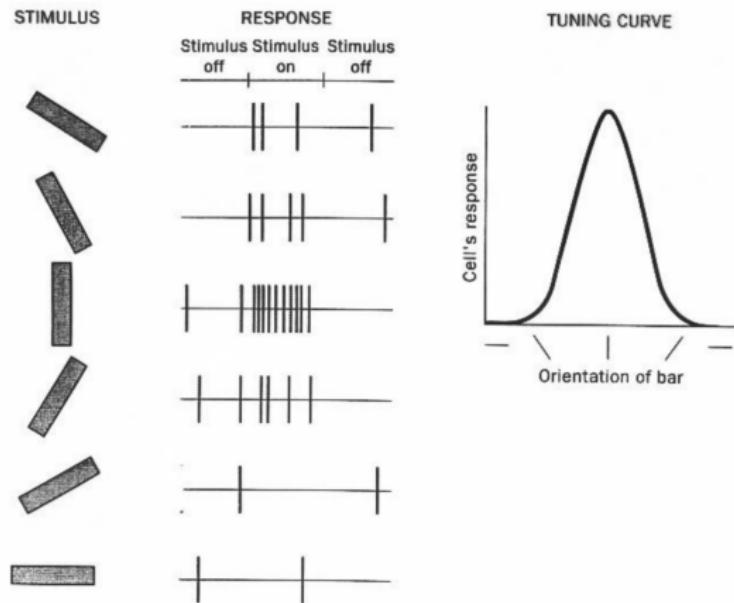
V1

(Cortex visuel primaire)

Chargé de traiter les informations visuelles.

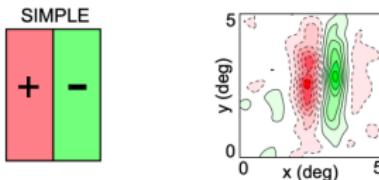
Cellules simples de V1

- L'un des principaux types de neurones dans V1
- Sensible à l'orientation : forte réponse aux lignes et aux bords avec des orientations spécifiques dans le champ visuel.



Profil réceptif des cellules simples de V1

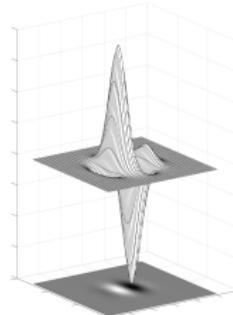
Il représente la réponse d'une cellule en fonction de la présence d'un stimulus sur la rétine.
Images from [DAOF95, Wan95].



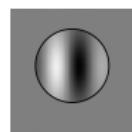
Cette réponse est formalisée mathématiquement en termes de filtres de Gabor:

$J \subset \text{RETINA}$

$$\begin{aligned} J : J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto e^{-\frac{\|(x, y)\|^2}{\sigma}} \cdot \sin(2\pi f x + \phi) \end{aligned}$$



Gabor patch

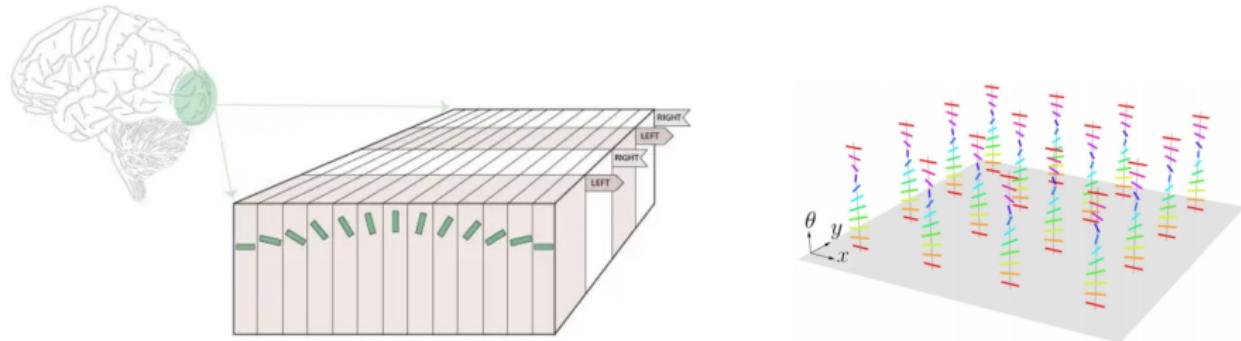


Les lignes de niveau de φ (patch de Gabor) indiquent la direction préférentielle et sont conformes à la mesure des profils.

Organisation en colonnes des cellules simples de V1

Hubel-Wiesel [HW62]: les cellules simples sélectives de l'orientation sont disposées en colonnes dans le cortex visuel primaire. Précisément:

- orientation préférentielle constante perpendiculairement à la surface corticale
- orientation préférentielle varie progressivement dans les directions parallèles à la surface, de telle sorte que différentes colonnes sont sensibles à différentes orientations

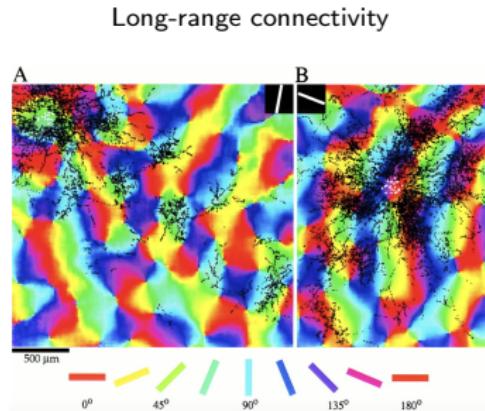
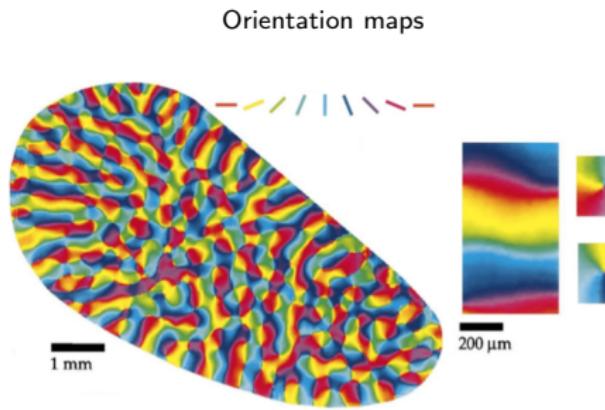


La structure anatomique reflète les propriétés fonctionnelles des cellules simples :

- Chaque point de la rétine est lié à une structure colonnitaire dans V1.
- Cela favorise le traitement des informations liées à l'orientation.

Connectivité corticale en V1

Cartes d'orientation [MAHG93, BZSF97] : représentent la disposition spatiale des neurones dans V1 en fonction de leurs préférences d'orientation. La préférence d'orientation d'un point à l'autre varie progressivement.



Les connexions sont mesurées à l'aide d'un traceur. Elles sont:

- isotropes dans le voisinage du point d'injection.
- anisotropes (fortement directionnelles) entre des neurones distants.

Modèles mathématiques pour la vision

OBJECTIF : comprendre comment on intègre les informations perceptuelles et neuronales pour identifier les contours.

Seconde moitié de 1900 :

- Koenderink-van Doorn [KvD76, KvD87]
- Mumford [Mum94]
- Hoffmann [Hof89]

Petitot-Tondut [PT99]: neurogéométrie de la vision.

Utiliser les instruments de la géométrie différentielle et de la théorie des groupes pour expliquer le comportement du cortex visuel à partir de son architecture fonctionnelle.

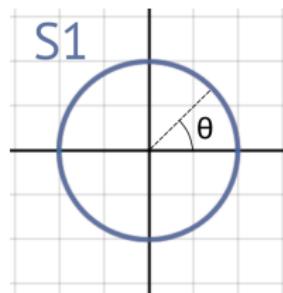
Développement après 2000 :

- Zucker [BSZ04]
- Citti-Sarti [CS06], Sarti-Citti-Petitot [SCP07]
- Duits van Almsick Franchen, ter Haar Romeny
- ...et bien d'autres !

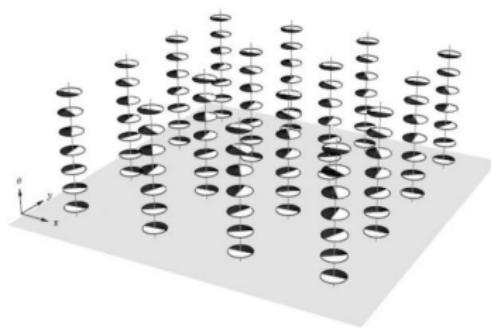
Le modèle Citti-Sarti dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$

Definition

L'espace perceptif, c'est-à-dire la représentation mentale de l'information sensorielle, est défini dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$.



Columnar organization of V1



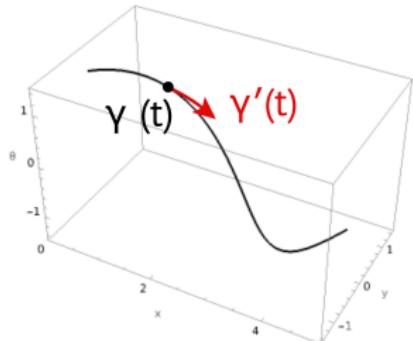
⇒ Étant donné un point $p = (x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$, celui-ci est identifié à une cellule simple de V1 sélective de l'orientation θ .

Courbes de connectivité en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$

Definition

Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ une courbe paramétrique. Le **vecteur tangent** est donné par $\gamma'(t)$ s'il existe et si $\gamma'(t) \neq 0$.

Il représente la direction locale de la courbe.

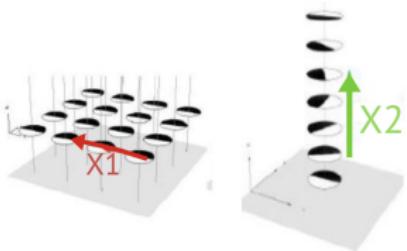


Privileged direction in V1

Famille de courbes admissibles dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$:

On considère $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ t.q.

$$\gamma'(t) = X_1 + kX_2.$$



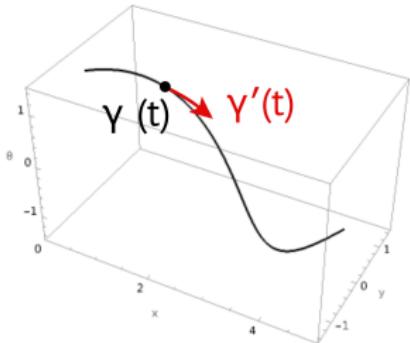
On peut relier toutes les paires de points en utilisant ces deux directions !

Courbes de connectivité en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$

Definition

Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ une courbe paramétrique. Le **vecteur tangent** est donné par $\gamma'(t)$ s'il existe et si $\gamma'(t) \neq 0$.

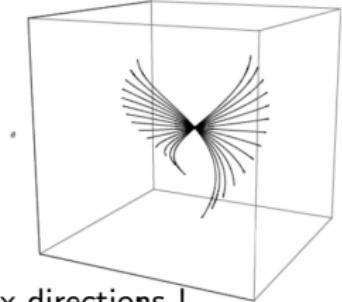
Il représente la direction locale de la courbe.



Famille de courbes admissibles dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$:

On considère $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ t.q.

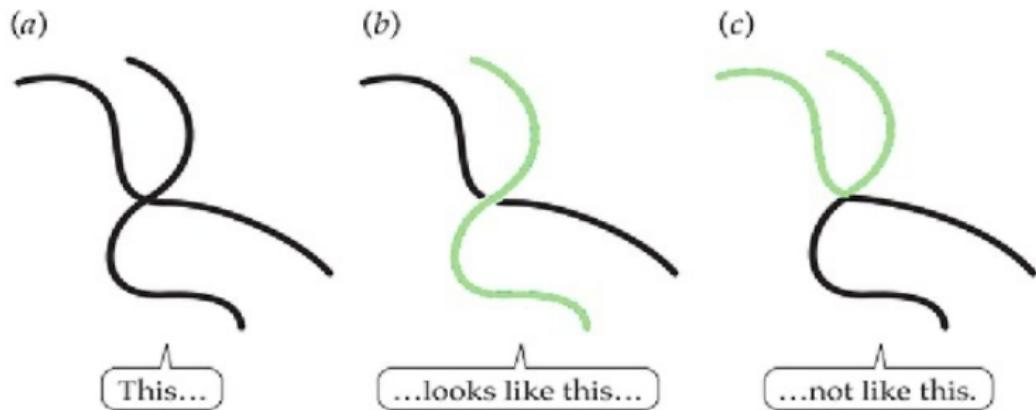
$$\gamma'(t) = X_1 + kX_2.$$



On peut relier toutes les paires de points en utilisant ces deux directions !

La loi Gestalt de la bonne continuation

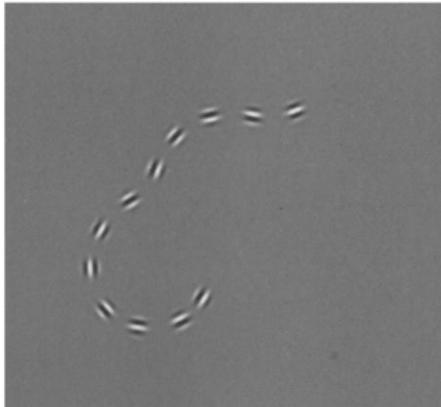
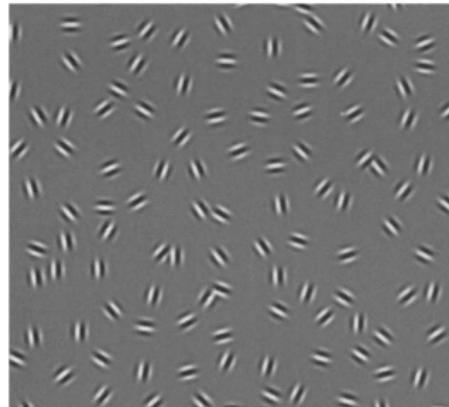
"Les éléments alignés (ou ayant un alignement comparable) tendent à former une courbe continue. Les gens ont tendance à percevoir les objets alignés comme formant des contours lisses et ininterrompus".



Comment le système visuel encode la bonne continuation du contour?

Expérience psychophysique proposée par Field, Hayes et Hess

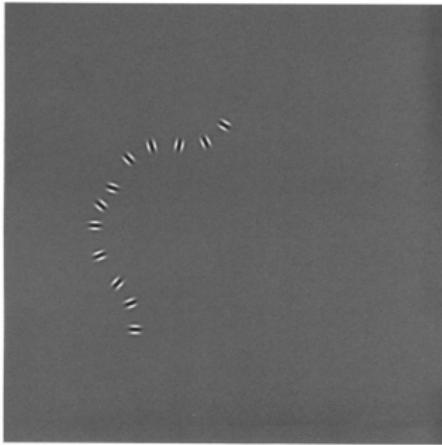
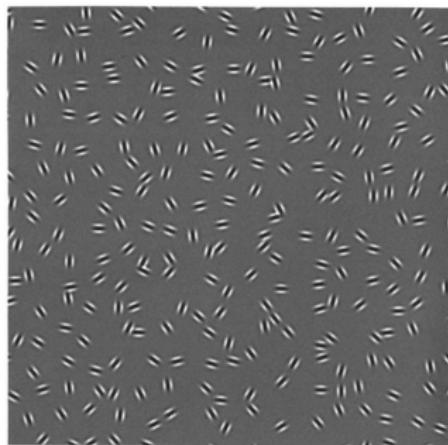
L'expérience proposée dans [FHH93] implique la présentation d'une image contenant des patchs de Gabor alignés, disposés en forme de chemin, superposée à un grand nombre de patchs de Gabor distribués aléatoirement.



Le but de l'expérience était de tester la capacité du sujet à détecter les unités perceptives présentes dans le stimulus visuel:

Expérience psychophysique proposée par Field, Hayes et Hess

L'expérience proposée dans [FHH93] implique la présentation d'une image contenant des patchs de Gabor alignés, disposés en forme de chemin, superposée à un grand nombre de patchs de Gabor distribués aléatoirement.



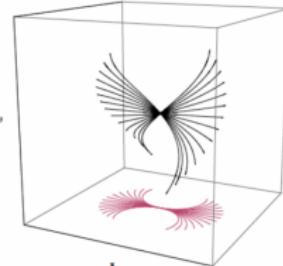
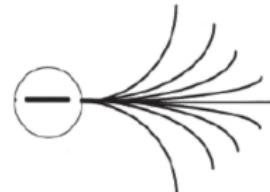
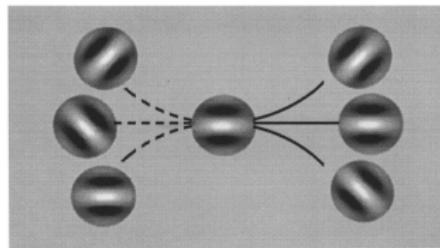
Le but de l'expérience était de tester la capacité du sujet à détecter les unités perceptives présentes dans le stimulus visuel:

- changement de l'orientation des patchs de Gabor formant le chemin détruit la perception.

Expérience psychophysique proposée par Field, Hayes et Hess

Champs d'associations: description du schéma permettant de déterminer quels éléments (patches de Gabor) peuvent être associés à la même unité perceptive en termes d'orientation et de position. Il y a une forte corrélation entre:

- éléments alignés ;
- éléments co-circulaires.



⇒ L'ensemble des courbes proposées pour décrire les champs d'associations est bien formalisé par la famille des courbes admissibles dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Distance induite par les courbes

Definition

Une **distance** d sur un ensemble X est une fonction $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes, pour tout x, y, z dans X :

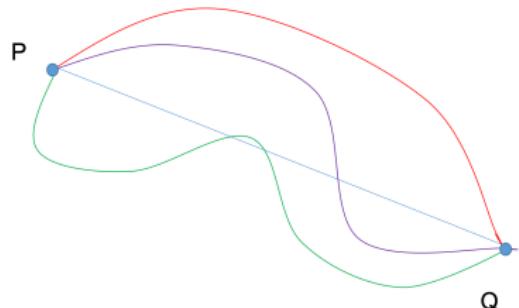
- 1 $d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- 2 $d(x, y) = d(y, x)$ (**symétrie**)
- 3 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (**inégalité triangulaire**)

On considère, pour $p, q \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$:

$$d(p, q) := \inf_{\gamma} \{\ell(\gamma) \mid \gamma \text{ est une courbe reliant } p \text{ et } q\}$$

Cette distance dépend de :

- Les courbes reliant les points p et q .
- La notion de longueur ℓ



Sphères induites par la distance

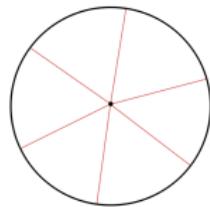
On considère la sphère de rayon r centrée en x :

$$S_d(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) = r\}.$$

(l'ensemble des points qui sont à distance r de x .)

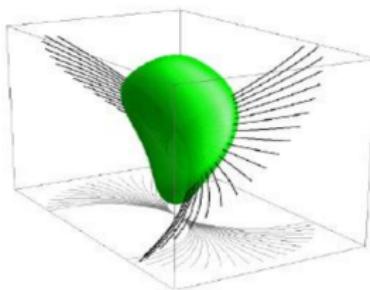
Les courbes qui définissent la distance affectent la forme des sphères :

\mathbb{R}^2



Sphère euclidienne

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$



Champ d'association sphère

\mathbb{R}^2 -projection



La distance mesure la corrélation entre les points, qui peuvent être regroupés en unités perceptives.

L'individualisation des contours perceptifs

Algorithme proposé par [SC15] :

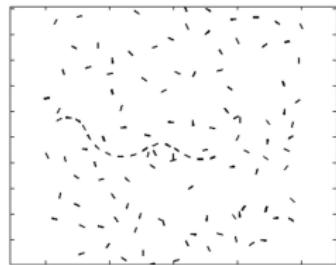
$\#\{\text{ensemble de points de l'image}\} = 120.$

Pour chaque couple (i, j) de points d'image avec $i, j = 1 \dots 120$, on définit:

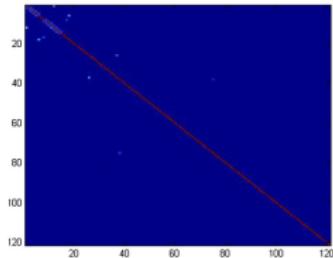
$$A(i, j) := e^{-d(i, j)^2}.$$

A est une mesure de l'affinité entre les points.

Image in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$



Affinity Matrix A



L'individualisation des contours perceptifs

Algorithme proposé par [SC15] :

$\#\{\text{ensemble de points de l'image}\} = 120.$

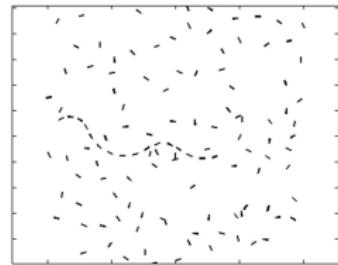
Pour chaque couple (i, j) de points d'image avec $i, j = 1 \dots 120$, on définit:

$$A(i, j) := e^{-d(i, j)^2}.$$

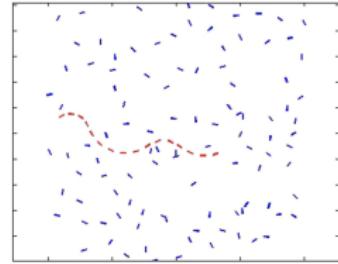
A est une mesure de l'affinité entre les points.

Les points les plus affiné sont indiqués en rouge. Ils détectent le contour bidimensionnel perçu.

Image in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$

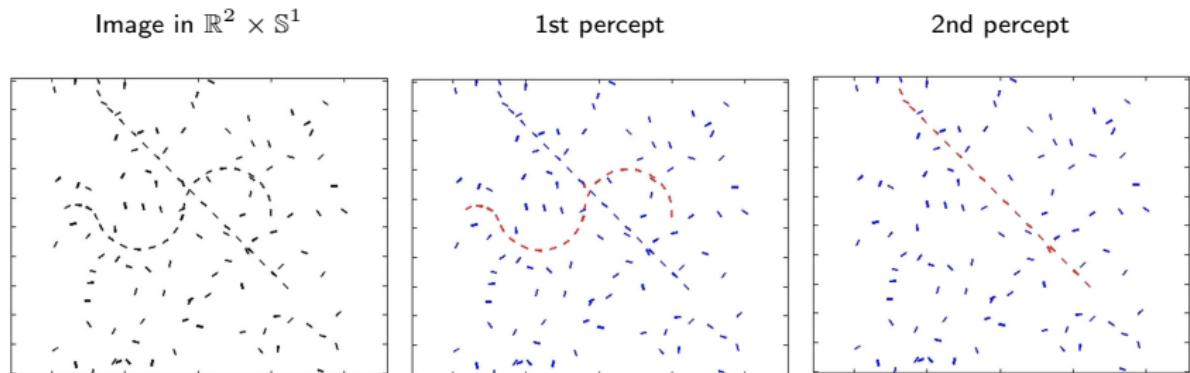


Detected contour



L'individualisation des contours perceptifs

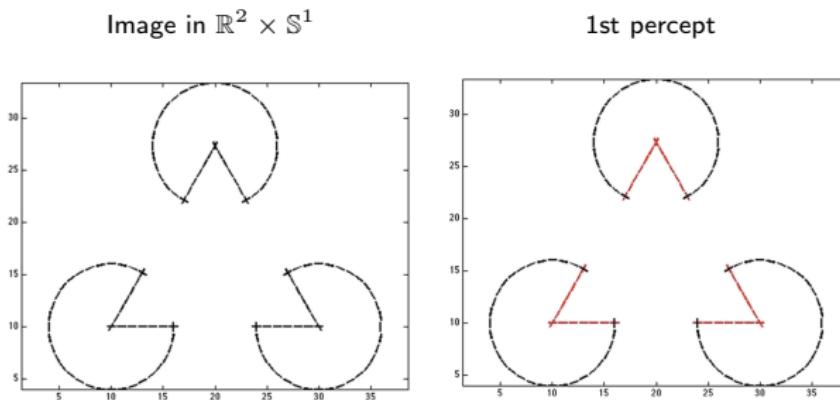
Stimulus avec 2 unités perceptives.



- Individualisation des 2 contours de l'image.
- La corrélation la plus forte découle de l'unité perceptive courbe.
- Les éléments disposés en lignes droites sont également corrélés : ils forment la deuxième unité perceptive.

L'individualisation des contours perceptifs

Triangle de Kanisza (August Kanisza 1858).



- Les éléments les plus fortement corrélés sont représentés en rouge. Ils correspondent au triangle de l'image Kanisza.
- Il existe une deuxième corrélation, plus faible (non illustrée), qui permet de récupérer les cercles.
- Cela montre que le triangle est plus saillant que les cercles, ce qui confirme qu'il s'agit d'un bon modèle pour les mécanismes de perception visuelle.

Conclusions

- ✿ Phénomènes perceptuels
 - Les lois de la Gestalt sur l'organisation de la perception
- ✿ Système visuel
 - Architecture fonctionnelle du cortex visuel primaire pour les cellules simples sélectives de l'orientation.
- ✿ Modèle neurogéométrique proposé par Citti-Sarti in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$.
 - La perception des stimuli visuels dérive d'une notion de distance basée sur des courbes spécifiques. Ces courbes sont dirigées par les cellules simples de V1, et les informations qu'elles véhiculent sont liées à la loi de bonne continuation de Gestalt.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION!!

References |



O. Ben-Shahar and S. Zucker.

Geometrical computations explain projection patterns of long-range horizontal connections in visual cortex.
Neural computation, 16(3):445–476, 2004.



W. H. Bosking, Y. Zhang, B. Schofield, and D. Fitzpatrick.

Orientation selectivity and the arrangement of horizontal connections in tree shrew striate cortex.
J. Neurosci.; Journal of Neuroscience, 17(6):2112–2127, 1997.



G. Citti and A. Sarti.

A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space.
Journal of Mathematical Imaging and Vision, 24(3):307–326, feb 2006.
doi:10.1007/s10851-005-3630-2.



G. C. De Angelis, I. Ohzawa, and R. D. Freeman.

Receptive-field dynamics in the central visual pathways.
Trends in neurosciences, 18(10):451–458, 1995.
doi:10.1016/0166-2236(95)94496-r.



D. J. Field, A. Hayes, and R. F. Hess.

Contour integration by the human visual system: Evidence for a local "association field".
Vision Research, 33(2):173–193, 1993.
doi:10.1016/0042-6989(93)90156-Q.



W. C. Hoffman.

The visual cortex is a contact bundle.
Applied Mathematics and Computation, 32(2):137–167, 1989.
doi:10.1016/0096-3003(89)90091-X.



D. H. Hubel and T. N. Wiesel.

Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat's visual cortex.
The Journal of Physiology, 160(1):106–154, jan 1962.
doi:10.1113/jphysiol.1962.sp006837.

References II

-  K. Koffka.
Principles of gestalt psychology (nueva york, harcourt, brace &co).
. , 1935.
-  W. Kohler.
Gestalt psychology. new york: H. liveright, 1929.
-  J. J. Koenderink and A. J. van Doorn.
The singularities of the visual mapping.
Biological Cybernetics, 24(1):51–59, 1976.
doi:10.1007/BF00365595.
-  J. J. Koenderink and A. J. van Doorn.
Representation of local geometry in the visual system.
Biological Cybernetics, 55(6):367–375, Mar 1987.
doi:10.1007/bf00318371.
-  R. Malach, Y. Amir, M. Harel, and A. Grinvald.
Relationship between intrinsic connections and functional architecture revealed by optical imaging and in vivo targeted biocytin injections in primate striate cortex.
Proceedings of the National Academy of Sciences, 90(22):10469–10473, 1993.
doi:10.1073/pnas.90.22.10469.
-  D. Mumford.
Elastica and computer vision.
In *Algebraic geometry and its applications*, pages 491–506. Springer, 1994.
doi:10.1007/978-1-4612-2628-4_31.
-  J. Petitot and Y. Tondut.
Vers une neurogéométrie. fibrations corticales, structures de contact et contours subjectifs modaux.
Mathématiques et Sciences humaines, 145:5–101, 1999.
URL: http://www.numdam.org/item/MSH_1999__145__5_0/.

References III



A. Sarti and G. Citti.

The constitution of visual perceptual units in the functional architecture of v1.
Journal of computational neuroscience, 38(2):285–300, 2015.



A. Sarti, G. Citti, and J. Petitot.

The symplectic structure of the primary visual cortex.
Biological Cybernetics, 98(1):33–48, Nov 2007.
doi:10.1007/s00422-007-0194-9.



B. A. Wandell.

Foundations of vision.
Sinauer Associates, 1995.



M. Wertheimer.

Laws of organization in perceptual forms.
Psychologische Forschung, 4, 1923.
doi:10.1037/11496-005.